

## Álgebra Lineal

### Determinantes

50) Calcular los determinantes siguientes:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix}$$

51) Calcular los determinantes de Vandermonde:

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(Indicación: resolver el primer caso y luego aplicar inducción).

52) Calcular el determinante de la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

**53)** Calcular, utilizando determinantes, el rango de la matriz siguiente en función de los valores del parámetro  $a$ :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**54)** Resolver los sistemas siguientes mediante la regla de Cramer o la regla de Cramer generalizada :

$$a) = \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ -x + 7y = 0 \end{cases}$$

$$b) = \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$c) = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$d) = \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + az = b \end{cases}$$

**55)** Calcular para cada  $x \in \mathbf{C}$  el rango de la matrix

$$\begin{pmatrix} x & -1 & x & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 & -1 \\ 1 & x & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

**56)** Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de  $a$ :

$$\begin{cases} x + 3y - az = 4 \\ -ax + y + az = 0 \\ -x + 2ay = a + 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

**57)** Probar que Si  $A$  es una matriz real antisimétrica de orden impar su determinante es cero.

**58)** Sean  $a \in \mathbf{R}$  y  $n \in \mathbf{N}$ . Se pide:

a) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Indicar por qué es invertible y calcular su inversa mediante transformaciones elementales.

b) Si  $n = 4$  y  $a \neq 0$ , calcular las soluciones del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es  $A - A^t$ . (Utilizar el problema 57)

c) También en el caso  $n = 4$  y  $a \neq 0$ , encontrar una matriz de cinco filas y una columna,  $B$ , tal que el sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes  $A - A^t$  y matriz de términos independientes  $B$  sea incompatible.

**59)** Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de  $a$  y  $b$ :

$$\begin{aligned} 3ax + 3(b-1)y + (b+6)z &= 2b-1 \\ (b+2)y + z &= 0 \\ 2ax + 2(b-1)y + (b+4)z &= 2b-2 \end{aligned}$$

**60)** Calcular, utilizando determinantes, las inversas de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $a$  es un escalar.